Contenu du cours

Chap. 1 - Espaces vectoriels

On se limitera aux exemples usuels d'espaces vectoriels: $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$ *ou* $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})$ *où* Ω *est un ensemble quelconque,* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- ▷ Définition d'un sous-espace vectoriel. Espace vectoriel engendré par une famille finie.
- ▷ Etude des familles finies de vecteurs : familles libres, liées ; cas d'une famille de polynômes non nuls à degrés deux à deux distincts ; familles génératrices. Bases ; lien avec familles libres et génératrices.
- ▷ Rappels en dimension finie : théorème de la base incomplète, de la base extraite, théorème de la dimension, caractérisation des bases en dimension finie. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs.
- ▷ Produit de p sous-espaces vectoriels ; dimension.
- ▷ Somme de p sous-espaces ; somme directe de **deux** sous-espaces, somme directe de plusieurs sous-espaces, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul ; théorème de concaténation (et notion de base adaptée à une décomposition en somme directe). Sous-espaces supplémentaires et caractérisation en dimension finie. Existence d'un supplémentaire en dimension finie. Formule de Grassmann.
- ▷ Hyperplans d'un espace de dimension finie : sev admettant une droite comme supplémentaire ; caractérisation par la dimension, par une équation cartésienne. Intersection d'hyperplans : l'intersection de p hyperplans en dimension n est un sev de dimension au moins $n-p$; tout sev de dimension $n-p$ est l'intersection de p hyperplans. Interprétation géométrique associée pour les systèmes linéaires.

Attention :

- ▷ Pas d'applications linéaires à ce programme de colles.
- ▷ la notion de forme linéaire n'étant plus au programme, le lien hyperplan-forme linéaire n'est pas fait.

Chap. 2 - Intégrales généralisées

- ▷ Nature, et valeur en cas de convergence, de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, où $f : I = [a,b[\to\mathbb{K}$ est une fonction continue. Cas $I=[a,b[$, puis $I=]a,b[$. Intégrales faussement impropres.
- ▷ Comparaison par $\leqslant$ pour les fonctions à valeurs positives.
- ▷ Propriétés des intégrales convergentes : relation de Chasles, linéarité, intégrale d'une fonction à valeurs complexes, croissance, positivité (en version améliorée : si f est positive et d'intégrale nulle sur I, alors f est la fonction nulle).
- ▷ Intégrales absolument convergentes, fonctions intégrables sur un intervalle. Espace $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{K})$. Lien entre absolue convergence et convergence. Inégalité triangulaire.
- ▷ Exemples de référence : $t\mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$, $t\mapsto\ln(t)$ est intégrable en 0. Critère de Riemann en $+\infty$, en 0 et en a^+ ou a^-.
- ▷ Théorèmes de comparaison par $\leqslant$, $\sim, o, O$ pour l'intégrabilité.
- ▷ Intégration par parties généralisée (avec l'hypothèse : uv admet une limite finie).
- ▷ Théorème de changement de variable généralisé, pour la convergence et le calcul des intégrales impropres. Application à l'étude en une borne finie autre que 0 : f est intégrable en b^- (resp. a^+) si et seulement si $t\mapsto f(b-t)$ (resp. $t\mapsto f(a+t)$) est intégrable en 0^+.

Remarques :

- ▷ Le nouveau programme privilégie la notion d'intégrabilité (ou celle d'absolue convergence). Les théorèmes de comparaison sont tous énoncés pour l'intégrabilité, donc ne nécessitent plus d'hypothèse de signe, à part la comparaison par $\leqslant$, qui existe en deux versions.
- ▷ On peut désormais parler d'intégrabilité en une borne plutôt que sur un intervalle (ou de convergence de l'intégrale en une borne).
- ▷ L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Questions de cours

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.
On demandera à chaque étudiant un énoncé figurant au programme de colle (Chap. 1 ou Chap. 2) et/ou le développement d'un exemple du cours parmi :

- Groupe A :
  - Ex 1.1, 1.4.ii, 1.5, 1.7, 1.10
  - Ex 2.1 à Ex 2.12 ; démonstration du critère de Riemann en $+\infty$.
- Groupe B :
  - Ex 1.1, 1.4.i, 1.5, 1.10
  - Ex 2.1, 2.4.i, 2.7., 2.8, 2.9, 2.11 ; démonstration du critère de Riemann en $+\infty$.

Compétences de base

Concernant le Chapitre 1 :

- Savoir décrire un sev comme Vect(...) et en déduire une famille génératrice
- Savoir prouver la liberté d'une famille
- Obtenir une base avec une famille libre de "bon" cardinal
- Connaître les dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et leurs bases canoniques respectives
- Savoir montrer que $F = G$ par double inclusion
- Savoir montrer que $F = G$ par une inclusion et égalité des dimensions
- Savoir montrer que $F \oplus G = E$ par analyse-synthèse
- Savoir montrer que $F \oplus G = E$ par $F \cap G = \{0\}$ et un argument de dimension
- Savoir montrer que $F \oplus G = E$ par théorème de concaténation.
- Savoir reconnaître un hyperplan par son équation et en déduire la dimension

Concernant le Chapitre 2 :

- Savoir détecter les bornes problèmes
- Savoir revenir à la définition pour la CV ou le calcul
- Reconnaître les intégrales faussement impropres en une borne finie
- Savoir comparer par $\sim$ (en priorité)
- Savoir comparer par o en passant par l'intégrabilité.
- Savoir comparer par $\leqslant$ ou o en se méfiant du sens d'application
- Savoir passer de l'intégrabilité à la convergence, et utiliser un argument de signe en cas de non-intégrabilité.
- Savoir utiliser une intégration par partie généralisée
- Savoir faire un changement de variable généralisé

❖ ❖ ❖