

---

**Contenu du cours**
**Chap. 2 - Intégrales généralisées**

- ▷ Nature, et valeur en cas de convergence, de l'intégrale impropre  $\int_a^b f(t) dt$ , où  $f : I = [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  est une fonction continue. Cas  $I = [a, b[$ , puis  $I = ]a, b[$ . Intégrales faussement impropres.
- ▷ Comparaison par  $\leq$  pour les fonctions à valeurs positives.
- ▷ Propriétés des intégrales convergentes : relation de Chasles, linéarité, intégrale d'une fonction à valeurs complexes, croissance, positivité (en version améliorée : si  $f$  est positive et d'intégrale nulle sur  $I$ , alors  $f$  est la fonction nulle).
- ▷ Intégrales absolument convergentes, fonctions intégrables sur un intervalle. Espace  $L^1(I, \mathbb{K})$ . Lien entre absolue convergence et convergence. Inégalité triangulaire.
- ▷ Exemples de référence :  $t \mapsto e^{-\alpha t}$  est intégrable en  $+\infty$ ,  $t \mapsto \ln(t)$  est intégrable en 0. Critère de Riemann en  $+\infty$ , en 0 et en  $a^+$  ou  $a^-$ .
- ▷ Théorèmes de comparaison par  $\leq, \sim, o, O$  pour l'intégrabilité.
- ▷ Intégration par parties généralisée (avec l'hypothèse :  $uv$  admet une limite finie).
- ▷ Théorème de changement de variable généralisé, pour la convergence et le calcul des intégrales impropres. Application à l'étude en une borne finie autre que 0 :  $f$  est intégrable en  $b^-$  (resp.  $a^+$ ) si et seulement si  $t \mapsto f(b-t)$  (resp.  $t \mapsto f(a+t)$ ) est intégrable en  $0^+$ .

**Remarques :**

- ▷ Le nouveau programme privilégie la notion d'intégrabilité (ou celle d'absolue convergence). Les théorèmes de comparaison sont tous énoncés pour l'intégrabilité, donc ne nécessitent plus d'hypothèse de signe, à part la comparaison par  $\leq$ , qui existe en deux versions.
- ▷ On peut désormais parler d'intégrabilité en une borne plutôt que sur un intervalle (ou de convergence de l'intégrale en une borne).
- ▷ L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

---

**Questions de cours**

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.

On demandera à chaque étudiant un (ou deux) énoncés figurant au programme de colle (Chap. 2) et le développement d'un exemple du cours parmi :

- ▷ Groupe A : Ex 2.1 à Ex 2.12 ; démonstration du critère de Riemann en  $+\infty$ .
- ▷ Groupe B : Ex 2.1, 2.4.i, 2.7., 2.8, 2.9, 2.11 ; démonstration du critère de Riemann en  $+\infty$ .

---

**Compétences de base**

Concernant le Chapitre 2 :

- ▷ Savoir détecter les bornes problèmes
- ▷ Savoir revenir à la définition pour la CV ou le calcul
- ▷ Reconnaître les intégrales faussement impropres en une borne finie

- ▷ Savoir comparer par  $\sim$  (en priorité)
- ▷ Savoir comparer par  $o$  en passant par l'intégrabilité.
- ▷ Savoir comparer par  $\leq$  ou  $o$  en se méfiant du sens d'application
- ▷ Savoir passer de l'intégrabilité à la convergence, et utiliser un argument de signe en cas de non-intégrabilité.
- ▷ Savoir utiliser une intégration par partie généralisée
- ▷ Savoir faire un changement de variable généralisé

