
Contenu du cours
Chap. 2 - Intégrales généralisées

- ▷ Nature, et valeur en cas de convergence, de l'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$, où $f : I = [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue. Cas $I = [a, b[$, puis $I =]a, b[$. Intégrales faussement impropres.
- ▷ Comparaison par \leq pour les fonctions à valeurs positives.
- ▷ Propriétés des intégrales convergentes : relation de Chasles, linéarité, intégrale d'une fonction à valeurs complexes, croissance, positivité (en version améliorée : si f est positive et d'intégrale nulle sur I , alors f est la fonction nulle).
- ▷ Intégrales absolument convergentes, fonctions intégrables sur un intervalle. Espace $L^1(I, \mathbb{K})$. Lien entre absolue convergence et convergence. Inégalité triangulaire.
- ▷ Exemples de référence : $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$, $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0. Critère de Riemann en $+\infty$, en 0 et en a^+ ou a^- .
- ▷ Théorèmes de comparaison par \leq , \sim , o , O pour l'intégrabilité.
- ▷ Intégration par parties généralisée (avec l'hypothèse : uv admet une limite finie).
- ▷ Théorème de changement de variable généralisé, pour la convergence et le calcul des intégrales impropres. Application à l'étude en une borne finie autre que 0 : f est intégrable en b^- (resp. a^+) si et seulement si $t \mapsto f(b-t)$ (resp. $t \mapsto f(a+t)$) est intégrable en 0^+ .

Remarques :

- ▷ Le nouveau programme privilégie la notion d'intégrabilité (ou celle d'absolue convergence). Les théorèmes de comparaison sont tous énoncés pour l'intégrabilité, donc ne nécessitent plus d'hypothèse de signe, à part la comparaison par \leq , qui existe en deux versions.
- ▷ On peut désormais parler d'intégrabilité en une borne plutôt que sur un intervalle (ou de convergence de l'intégrale en une borne).
- ▷ L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Questions de cours

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.

On demandera à chaque étudiant un énoncé figurant au programme de colle (Chap. 2) et/ou le développement d'un exemple du cours parmi :

- ▷ Groupe A : Ex 2.1 à Ex 2.12 ; démonstration du critère de Riemann en $+\infty$.
- ▷ Groupe B : Ex 2.1, 2.4.i, 2.7., 2.8, 2.9, 2.11 ; démonstration du critère de Riemann en $+\infty$.

Compétences de base

Concernant le Chapitre 2 :

- ▷ Savoir détecter les bornes problèmes
- ▷ Savoir revenir à la définition pour la CV ou le calcul
- ▷ Reconnaître les intégrales faussement impropres en une borne finie
- ▷ Savoir comparer par \sim (en priorité)
- ▷ Savoir comparer par o en passant par l'intégrabilité.
- ▷ Savoir comparer par \leq ou o en se méfiant du sens d'application
- ▷ Savoir passer de l'intégrabilité à la convergence, et utiliser un argument de signe en cas de non-intégrabilité.
- ▷ Savoir utiliser une intégration par partie généralisée
- ▷ Savoir faire un changement de variable généralisé

