Contenu du cours

Chap. 2 - Intégrales généralisées

- Nature, et valeur en cas de convergence, de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, où $f : I = [a, b[\to \mathbb{K}$ est une fonction continue. Cas $I = [a, b[$, puis $I =]a, b[$. Intégrales faussement impropres.
- Comparaison par $\leqslant$ pour les fonctions à valeurs positives.
- Propriétés des intégrales convergentes : relationde Chasles, linéarité, intégrale d'une fonction à valeurs complexes, croissance, positivité (en version améliorée : si f est positive et d'intégrale nulle sur I, alors f est la fonction nulle).
- Intégrales absolument convergentes, fonctions intégrables sur un intervalle. Espace $\mathrm{L}^1(I, \mathbb{K})$. Lien entre absolue convergence et convergence. Inégalité triangulaire.
- Exemples de référence : $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable en $+\infty$, $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0. Critère de Riemann en $+\infty$, en 0 et en a^+ ou a^-.
- Théorèmes de comparaison par $\leqslant$, $\sim, o, O$ pour l'intégrabilité.
- Intégration par parties généralisée (avec l'hypothèse : uv admet une limite finie).
- Théorème de changement de variable généralisé, pour la convergence et le calcul des intégrales impropres. Application à l'étude en une borne finie autre que 0 : f est intégrable en b^- (resp. a^+) si et seulement si $t \mapsto f(b-t)$ (resp. $t \mapsto f(a+t)$) est intégrable en 0^+.

Remarques :

- Le nouveau programme privilégie la notion d'intégrabilité (ou celle d'absolue convergence). Les théorèmes de comparaison sont tous énoncés pour l'intégrabilité, donc ne nécessitent plus d'hypothèse de signe, à part la comparaison par $\leqslant$, qui existe en deux versions.
- On peut désormais parler d'intégrabilité en une borne plutôt que sur un intervalle (ou de convergence de l'intégrale en une borne).
- L'étude de la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Questions de cours

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.
On demandera à chaque étudiant un (ou deux) énoncés figurant au programme de colle (Chap. 2) et le développement d'un exemple du cours parmi :

- Groupe A : Ex 2.1 à Ex 2.12 ; démonstration du critère de Riemann en $+\infty$.
- Groupe B : Ex 2.1, 2.4.i, 2.7., 2.8, 2.9, 2.11 ; démonstration du critère de Riemann en $+\infty$.

Compétences de base

Concernant le Chapitre 2 :

- Savoir détecter les bornes problèmes
- Savoir revenir à la définition pour la CV ou le calcul
- Reconnaître les intégrales faussement impropres en une borne <u>finie</u>

- ▷ Savoir comparer par $\sim$ (en priorité)
- ▷ Savoir comparer par o en passant par l'intégrabilité.
- ▷ Savoir comparer par $\leqslant$ ou o en se méfiant du sens d'application
- ▷ Savoir passer de l'intégrabilité à la convergence, et utiliser un argument de signe en cas de non-intégrabilité.
- ▷ Savoir utiliser une intégration par partie généralisée
- ▷ Savoir faire un changement de variable généralisé

❖ ❖ ❖