

---

**Contenu du cours**
**Chap. 3 - Applications linéaires**

- ▷ Applications linéaires, rappels de vocabulaire. Noyau et image d'une application linéaire : intérêt. Cas de la dimension finie, théorème du rang, caractérisation des isomorphismes. Image d'une base par une application linéaire.
- ▷ Homothéties vectorielles, projecteurs et symétries relativement à deux espaces supplémentaires : définition, propriétés, caractérisations.
- ▷ Rappels sur les matrices: représentation d'une application linéaire, produit matriciel et lien avec l'image d'un vecteur et la composée des applications. Formule de changement de base pour une application linéaire, pour un endomorphisme.
- ▷ Matrices semblables. Trace d'une matrice ; propriétés. Trace d'un endomorphisme.
- ▷ Sous-espaces stables par un endomorphisme : définition. Notion d'endomorphisme induit. Matrice d'un endomorphisme laissant stable un sous-espace, relativement à une base adaptée.

**Chap. 4 - Déterminants**

- ▷ Déterminant d'une matrice carrée, défini comme unique application de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$  linéaire par rapport à chacune des colonnes, antisymétrique et vérifiant  $\det(I_n) = 1$  ; expression pour  $n = 1$  ou  $n = 2$ .
- ▷ Propriétés du déterminant : caractère alterné,  $\det(\lambda A)$ ,  $\det(AB)$  (admis),  $\det(A^{-1})$ , cas de matrices semblables,  $\det(A^T)$  (admis).
- ▷ Calcul pratique des déterminants : déterminant d'une matrice triangulaire, effet de transformations élémentaires ; développement suivant une rangée (admis).
- ▷ Caractérisation de l'inversibilité.
- ▷ Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base ; applications : caractérisation des bases, orientation du plan ou de l'espace, bases directes ou indirectes.
- ▷ Déterminant d'un endomorphisme, caractérisation des automorphismes, traduction des propriétés vues sur les matrices.

---

**Questions de cours**

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.

On demandera à chaque étudiant un (ou deux) énoncés figurant au programme de colle (Chap. 3 ou 4) et le développement d'un exemple du cours parmi :

- ▷ Groupe A : Ex 3.1 à Ex 3.14 ; démonstration de  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  ; Ex 4.1 à 4.5.
- ▷ Groupe B : Ex 3.1, 3.3, 3.4, 3.7, 3.9, 3.10, 3.12.ii; démonstration de  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  ; Ex 4.1, 4.2.i, 4.3, 4.5.

---

**Compétences de base**

Concernant le Chapitre 3 :

- ▷ Savoir montrer la linéarité d'une application
- ▷ Savoir trouver  $\text{Ker } f$  en résolvant  $f(x) = 0$

- ▷ Savoir trouver  $\text{Im } f$  avec  $\text{Im } f = \text{Vect } (f(\mathcal{B}))$
- ▷ Savoir prouver l'injectivité de  $f$  avec le noyau
- ▷ Savoir en déduire la bijectivité de  $f$  en dimension finie
- ▷ Savoir définir le projeté ou le symétrique d'un vecteur
- ▷ Savoir reconnaître un projecteur ou une symétrie (théorème de caractérisation)
- ▷ Savoir construire la matrice d'une application linéaire
- ▷ Savoir écrire la formule du produit matriciel
- ▷ Savoir inverser une matrice
- ▷ Savoir faire un changement de base pour une application linéaire
- ▷ Savoir calculer la trace d'un endomorphisme en se plaçant dans une base judicieuse
- ▷ Savoir montrer qu'un sous-espace est stable par un endomorphisme

Concernant le chapitre 4 :

- ▷ Connaître les effets des transformations élémentaires sur  $\det$
- ▷ Savoir développer un déterminant suivant une rangée
- ▷ Savoir factoriser une rangée d'un déterminant par un coefficient
- ▷ Connaître  $\det(\lambda A)$ ,  $\det(A^T)$ ,  $\det(A^{-1})$ ,  $\det(AB)$
- ▷ Savoir caractériser les bases, les automorphismes, les matrices inversibles avec le déterminant

