Contenu du cours

Chap. 6 - Réduction

- ▷ Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme, ou d'une matrice carrée; exemples en dimension n, en dimension quelconque. Equation aux éléments propres. Cas de la valeur propre 0. Droites stables par un endomorphisme.
- ▷ Somme directe des sev propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux. Liberté d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
- ▷ Polynôme caractéristique, défini par $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$. Lien avec les valeurs propres; ordre de multiplicité d'une valeur propre. Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité. Lien entre multiplicité de la valeur propre et dimension du sev propre associé.
- ▷ Diagonalisabilité : un endomorphisme f de E est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale. Exemple des projecteurs et des symétries. Cas d'une matrice. On obtient alors les caractérisations suivantes :

$$\begin{aligned}
f \text{ est diagonalisable} \quad &\iff \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f \text{ est semblable à une matrice diagonale} \\
&\iff \quad E \text{ admet une base de vecteurs propres pour } f \\
&\iff \quad \begin{cases} \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(f),\ \dim E_\lambda(f) = m_\lambda \end{cases} \\
&\iff \quad \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)} E_\lambda(f) = E \\
&\iff \quad \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E
\end{aligned}$$

- ▷ Conditions suffisantes de diagonalisabilité : le polynôme caractéristique est scindé à racines simples ; la matrice est symétrique réelle.
- ▷ Application de la diagonalisabilité au calcul des puissances d'une matrice.
- ▷ Trigonalisation d'une matrice, d'un endomorphisme : une matrice (ou un endomorphisme) est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
  Une matrice est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.
- ▷ Lien entre la trace ou le déterminant, et les valeurs propres d'une matrice trigonalisable.
- ▷ Application : calcul des puissances d'une matrice trigonalisable.

Remarques :

- ▷ *Conformément au programme, un exercice de trigonalisation devra comporter des indications : matrice triangulaire à obtenir, par exemple.*
- ▷ *L'application de la réduction aux systèmes de récurrence simultanée n'est plus explicitement au programme, de même que la recherche des solutions d'une équation de récurrence linéaire d'ordre p.*

Questions de cours

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.
On demandera à chaque étudiant un (ou deux) énoncés figurant au programme de colle (Chap. 6) et le développement d'un exemple du cours parmi :

- ▷ Groupe A : Ex 6.1 à 6.11

- ▷ Groupe B : Ex 6.1, 6.2.i., 6.4, 6.5.i, 6.6, 6.7, 6.9., 6.11

Compétences de base

Concernant le chapitre 6 :

- ▷ Savoir calculer un polynôme caractéristique
- ▷ Savoir déterminer un sev propre
- ▷ Savoir utiliser le rang pour en déduire la dimension d'un sev propre.
- ▷ Savoir exploiter le lien entre m_λ et $\dim(E_\lambda(f))$
- ▷ Savoir exploiter l'une ou l'autre des CNS de diagonalisabilité
- ▷ Savoir diagonaliser une matrice (remplir P et D).
- ▷ Savoir trigonaliser sur un exemple simple
- ▷ Connaître le lien entre la trace et les valeurs propres
- ▷ Savoir calculer les puissances d'une matrice triangulaire via la formule du binôme si les matrices commutent

❖ ❖ ❖