

---

**Contenu du cours**
**Chap. 7 - Séries entières**

- ▷ Définition d'une série entière ; définition du rayon de convergence (via le caractère borné ou non de la suite associée). Notation  $R(\sum a_n z^n)$ . Lemme d'Abel, autres définitions du rayon de convergence (via la convergence absolue/divergence grossière de la série). Disque (ouvert) de convergence.
- ▷ Détermination pratique du rayon de convergence : utilisation de majorations, d'équivalences, de  $o$ ,  $O$  ; intérêt de la règle de D'Alembert vue sur les séries numériques, règle de D'Alembert sur les séries entières non lacunaires. Exemple de référence :  $R(\sum n\alpha x^n)$ .
- ▷ Effet des opérations sur le rayon de convergence (multiplication par une constante, multiplication par  $n$ , addition, produit de Cauchy).
- ▷ Cas d'une variable réelle : intervalle ouvert de convergence. Théorème de continuité d'une série entière : la somme d'une série entière est continue sur son domaine de définition. Théorème de dérivation terme à terme et généralisation à un ordre de dérivation quelconque. Théorème de primitivation terme à terme d'une série entière.
- ▷ Développements en série entière : définition ; une fonction dse sur  $] -R, R[$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$ , réciproque fautive (admis). Série de Taylor. Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange. Unicité du DSE en cas d'existence.
- ▷ Développements usuels (à connaître parfaitement avec le domaine de validité et le RCV associé) :  $\exp$ ,  $\frac{1}{1+x}$ ,  $\frac{1}{1-x}$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $-\ln(1-x)$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $(1+x)^\alpha$ ,  $\operatorname{Arctan}$ .

---

**Questions de cours**

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.

On demandera à chaque étudiant un (ou deux) énoncés figurant au programme de colle (Chap. 7) et le développement d'un exemple du cours parmi :

- ▷ Groupe A : Ex 7.1 à 7.10, démonstration du Corollaire 7.9, ou la recherche des solutions développables en série entières de l'équation :  $(1+x)y'(x) - \alpha y(x) = 0$  vérifiant  $y(0) = 1$ .
- ▷ Groupe B : Ex 7.2, 7.3, 7.6, 7.8.i, 7.9, démonstration du Corollaire 7.9, ou la recherche des solutions développables en série entières de l'équation :  $(1+x)y'(x) - \alpha y(x) = 0$  vérifiant  $y(0) = 1$ .

---

**Compétences de base**

Concernant le chapitre 7:

- ▷ Reconnaître la définition du RCV
- ▷ Savoir déterminer un RCV par l'une des règles de D'Alembert
- ▷ Savoir revenir à la règle de D'Alembert en cas de série lacunaire
- ▷ Savoir comparer des RCV par  $\sim$  ou par  $\leq$ ,  $o$ ,  $O$
- ▷ Savoir déterminer la valeur d'une somme de série entière en  $\pm R$  par continuité
- ▷ Savoir dériver une SE terme à terme
- ▷ Savoir intégrer une SE terme à terme

