Contenu du cours

Chap. 7 - Séries entières

- ▷ Définition d'une série entière ; définition du rayon de convergence (via le caractère borné ou non de la suite associée). Notation $R(\sum a_n z^n)$. Lemme d'Abel, autres définitions du rayon de convergence (via la convergence absolue/divergence grossière de la série). Disque (ouvert) de convergence.
- ▷ Détermination pratique du rayon de convergence : utilisation de majorations, d'équivalences, de o, O ; intérêt de la règle de D'Alembert vue sur les séries numériques, règle de D'Alembert sur les séries entières non lacunaires. Exemple de référence : $R(\sum n\alpha x^n)$.
- ▷ Effet des opérations sur le rayon de convergence (multiplication par une constante, multiplication par n, addition, produit de Cauchy).
- ▷ Cas d'une variable réelle : intervalle ouvert de convergence. Théorème de continuité d'une série entière : la somme d'une série entière est continue sur son domaine de définition. Théorème de dérivation terme à terme et généralisation à un ordre de dérivation quelconque. Théorème de primitivation terme à terme d'une série entière.
- ▷ Développements en série entière : définition ; une fonction dse sur $]-R,R[$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, réciproque fausse (admis). Série de Taylor. Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange. Unicité du DSE en cas d'existence.
- ▷ Développements usuels (*à connaître parfaitement avec le domaine de validité et le RCV associé*) : exp, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $-\ln(1-x)$, cos, sin, ch, sh, $(1+x)^\alpha$, Arctan.

Chap. 8 - Espaces probabilisés

- ▷ Ensembles dénombrables, au plus dénombrables ; exemples de $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}$; produit d'ensembles dénombrables. Définition d'une tribu $\mathscr{A}$ d'un ensemble Ω, notion d'événement ; stabilité par intersection dénombrable. Vocabulaire probabiliste associé au vocabulaire ensembliste.
- ▷ Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$; cas de l'équiprobabilité ou probabilité uniforme. Propriétés élémentaires : probabilité de l'événement contraire, d'une réunion de deux événements, d'une différence ensembliste, croissance de la probabilité.
- ▷ Continuité monotone (cas d'une réunion croissante, d'une intersection décroissante d'événements). Application au cas général pour calculer la probabilité d'une intersection ou d'une réunion infinie comme limite. Sous-additivité : majoration de la probabilité d'une réunion au plus dénombrable d'événements.
- ▷ Événements indépendants, famille finie d'événements mutuellement indépendants ; lien entre ces deux notions. Probabilité conditionnelle de B sachant A, notée $\mathbf{P}_A(B)$ ou $\mathbf{P}(B|A)$; cas de deux événements indépendants. $\mathbf{P}_A$ est une probabilité.
- ▷ Formule des probabilités composées. Système complet d'événements, formule des probabilités totales. Formule de Bayes (ou de probabilité des causes).

Remarques :

- ▷ on veillera à ce que les raisonnements en probabilités soient rigoureux ; en particulier, une des attentes du programme est que les étudiants sachent traduire les événements rencontrés comme réunion, intersection ou complémentaires d'événements plus simples.
- ▷ les notions de dénombrabilité, tribu ne feront l'objet d'aucun développement.
- ▷ les exercices posés doivent pouvoir être résolus sans calculatrice, dans les conditions du concours.

Questions de cours

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.
On demandera à chaque étudiant un (ou deux) énoncés figurant au programme de colle (Chap. 7 ou 8) et le développement d'un exemple du cours parmi :

- ▷ Groupe A :
  - ▷ Ex 7.1 à 7.10
  - ▷ démonstration du Corollaire 7.9
  - ▷ recherche des solutions développables en série entières de l'équation : $(1+x)y'(x)-\alpha y(x)=0$ vérifiant $y(0)=1$.
  - ▷ Ex 8.3 à 8.12
- ▷ Groupe B :
  - ▷ Ex 7.2, 7.3, 7.6, 7.8.i, 7.9
  - ▷ démonstration du Corollaire 7.9
  - ▷ recherche des solutions développables en série entières de l'équation : $(1+x)y'(x)-\alpha y(x)=0$ vérifiant $y(0)=1$.
  - ▷ Ex 8.3, 8.5, 8.6, 8.8, 8.10, 8.11.

Compétences de base

Concernant le chapitre 7:

- ▷ Reconnaître la définition du RCV
- ▷ Savoir déterminer un RCV par l'une des règles de D'Alembert
- ▷ Savoir revenir à la règle de D'Alembert en cas de série lacunaire
- ▷ Savoir comparer des RCV par $\sim$ ou par $\leqslant, o, O$
- ▷ Savoir déterminer la valeur d'une somme de série entière en $\pm R$ par continuité
- ▷ Savoir dériver une SE terme à terme
- ▷ Savoir intégrer une SE terme à terme

Concernant le chapitre 8 :

- ▷ Savoir décrire un événement par réunion ou intersection d'événements
- ▷ Savoir calculer la probabilité d'un événement en utilisant l'événement contraire
- ▷ Ne pas confondre probabilité de B sachant A et probabilité de $B \cap A$
- ▷ Savoir calculer la probabilité d'une réunion disjointe
- ▷ Savoir calculer la probabilité d'une réunion infinie, par passage à la limite
- ▷ Savoir calculer la probabilité d'une intersection finie d'événements mutuellement indépendants
- ▷ Savoir calculer la probabilité d'une intersection finie par probabilités composées
- ▷ Savoir calculer la probabilité d'une intersection infinie, par passage à la limite
- ▷ Savoir appliquer la formule des probabilités totales pour mettre en évidence une distinction de cas
- ▷ Savoir appliquer la formule de Bayes pour intervertir cause et conséquence.

❖ ❖ ❖