Contenu du cours

Chap. 10 - Courbes paramétrées

- Généralités : définition d'un arc paramétré, support. Tangente à une courbe paramétrée, définie comme position-limite de la sécante.
- Point régulier, stationnaire. Tangente en un point régulier ou non. Entiers caractéristiques, allure locale de la courbe en un point.
- Détermination des branches infinies.
- Plan d'étude d'une courbe paramétrée, en particulier réduction du domaine d'étude.

Chap. 11 - Variables aléatoires discrètes

- Définition d'une v.a. discrète (v.a.d.) ; événement $(X \in U)$, $(X = x)$ et pour une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$ (v.a.r.d), $(X \leqslant x)$; loi d'une v.a.d. : donnée de $X(\Omega)$ et de $\mathbf{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. Système complet d'événements associés à une v.a.d.
- Lois usuelles : loi uniforme $\mathscr{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$, loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ (schéma théorique, variable indicatrice d'un événement), loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ (schéma théorique), loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ (schéma théorique, caractérisation par l'absence de mémoire), loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.
- Espérance d'une v.a.r.d. X d'espérance finie (ie avec absolue convergence de la série associée) ; propriétés : $\mathbf{E}(aX+b)$, positivité. Variable centrée. Théorème du transfert à **une** variable ; formule de l'antirépartition pour une v.a.r.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Espérance pour les lois usuelles.
- Variance d'une v.a.r.d. X admettant des moments d'ordre 2 ; formule de König-Huygens. Variable réduite, variable centrée réduite associée à une v.a.r. Propriétés usuelles de la variance : $\mathbf{V}(aX + b)$, positivité ; écart-type. Variance pour les lois usuelles.
- Fonction génératrice de somme $G_X(t) = \mathbf{E}(t^X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)t^n$, pour une v.a.r.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Lien avec l'espérance et le moment d'ordre 2.

Mise en garde :

- la notion spécifique de couple de variables aléatoires n'est pas à ce programme de colles.
- A ce stade, il n'est donc **pas possible** de donner d'exercice utilisant la notion de variables indépendantes.
- de même, la linéarité de l'espérance n'a été vue que dans sa forme faible, pour $\mathbf{E}(aX + b)$ et non pour $\mathbf{E}(aX + bY)$.

Questions de cours

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.
On demandera à chaque étudiant un (ou deux) énoncés figurant au programme de colle (Chap. 10 ou 11) et le développement d'un exemple du cours parmi :

- Groupe A :
  - Ex 10.1 à 10.9
  - preuve de la Proposition 10.9 : entiers caractéristiques et équivalents des coordonnées de $M(t)$ dans le repère $(M(t_0); \overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_q})$. Application à l'étude de l'allure locale de la courbe sur un cas au choix du colleur.
  - Ex 11.1 à 11.11.

- ▷ Groupe B :
  - ▷ Ex 10.2, 10.3, 10.4, 10.5, 10.7, 10.8.ii
  - ▷ Ex 11.2, 11.3, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8.ii, 11.11

Compétences de base

Concernant le chapitre 10 :

- ▷ Savoir déterminer les points stationnaires
- ▷ Savoir donner un vecteur directeur de la tangente en un point
- ▷ Savoir déterminer la tangente en un point-limite
- ▷ Savoir mettre en équation la tangente en un point
- ▷ Savoir donner l'allure en un point avec des DL pour obtenir p, q
- ▷ Savoir étudier les branches infinies d'une courbe et donner leur nom
- ▷ Savoir repérer certaines transformations géométriques simples et en déduire un intervalle d'étude

Concernant le chapitre 11 :

- ▷ Savoir déterminer la loi d'une v.a.r.d
- ▷ Savoir retrouver la loi à partir de la fonction de répartition
- ▷ Savoir reconnaître une loi binomiale (nombre de succès... avec hypothèses)
- ▷ Savoir reconnaître une loi géométrique (temps d'attente du premier succès... avec hypothèses)
- ▷ Savoir montrer qu'une v.a.r.d. est d'espérance finie
- ▷ Savoir calculer l'espérance d'une v.a.r.d. par la définition
- ▷ Savoir calculer l'espérance d'une v.a.r.d. par linéarité
- ▷ Savoir calculer une espérance par théorème du transfert, notamment pour les calculs de variance.
- ▷ Savoir former une fonction génératrice
- ▷ Savoir, à partir de la fonction génératrice, récupérer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(X^2)$.

❖ ❖ ❖