Contenu du cours

Chap. 12 - Espaces préhilbertiens

- Produit scalaire : définition et exemples usuels (sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathscr{C}^0([a,b])$).
- Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité. Norme préhilbertienne associée à un produit scalaire; espace préhilbertien réel.
- Orthogonalité de deux vecteurs; théorème de Pythagore, version généralisée à n vecteurs. Famille orthogonale, orthonormale; toute famille orthogonale de vecteurs tous non nuls (resp. orthonormale) est libre. Dans un ev de dimension finie, il existe une base orthogonale (algorithme de Gram-Schmidt). Calculs en base orthonormale : expression matricielle du produit scalaire, coordonnées d'un vecteur en BON.
- Orthogonal d'un sev de dimension finie d'un ev préhilbertien réel ; caractérisation des éléments de $F^\perp$ lorsqu'on connaît une famille génératrice de F. Projection orthogonale sur un sev F de dimension finie dans un espace préhilbertien réel E; F et l'orthogonal de F sont supplémentaires dans E, cas d'un hyperplan. Théorème de la projection orthogonale : expression de la projection orthogonale dans une base orthonormale de F.
- Distance d'un vecteur à un sev ; lien avec la projection orthogonale.

Chap. 13 - Fonctions de plusieurs variables - Partie I

On se limitera aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Les énoncés ont été donnés pour $\mathbb{R}^2$, mais restent au programme dans $\mathbb{R}^3$.

- Boules ouvertes ou fermées, parties ouvertes ; point intérieur, point adhérent (*les notions doivent être comprises, et les définitions correctement connues. On évitera cependant les exercices théoriques sur ces notions*).
- Définition d'une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ en a adhérent à D. Opérations sur les limites. Continuité, opérations sur les fonctions continues (*les problèmes de prolongement par continuité ne sont pas un objectif du programme*).
- Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) > 0$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Dérivées partielles premières d'une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ notées $\partial_i f$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, gradient de f en a, noté $\nabla f(a)$. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et opérations. Théorème admis : si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, f admet en tout point de U un développement limité d'ordre 1. Continuité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Composition des applications de classe $\mathscr{C}^1$ (règle de la chaîne) pour dériver $t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$.
- Dérivées partielles d'ordre 2, théorème de Schwarz.
- Fonctions de $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: fonctions coordonnées, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$, règle de la chaîne pour la dérivation de $(u,v) \mapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$. Composition des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

Questions de cours

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.
On demandera à chaque étudiant un (ou deux) énoncés figurant au programme de colle (Chap. 12 ou 13) et le développement d'un exemple du cours parmi :

- Groupe A :
  - Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (sans le cas d'égalité).
  - Ex 12.1 à 12.6

    - ▷ Ex 13.1 à 13.12
- ▷ Groupe B :
    - ▷ Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (sans le cas d'égalité).
    - ▷ Ex 12.1 à 12.6
    - ▷ Ex 13.3, 13.4, 13.5, 13.6, 13.9, 13.10, 13.12

Compétences de base

Concernant le chapitre 12,

- ▷ Savoir démontrer qu'une application est un produit scalaire
- ▷ Savoir mettre en place une orthonormalisation de Gram-Schmidt
- ▷ Savoir traduire que $x \in F^{\perp}$ via une famille génératrice de F
- ▷ Savoir calculer $p_F(x)$ en BON (formule)
- ▷ Savoir appliquer la définition pour calculer $p_F(x)$
- ▷ Savoir reconnaître la distance d'un vecteur à un sev
- ▷ Savoir calculer la distance d'un vecteur à un sev

Concernant le chapitre 13,

- ▷ Savoir représenter un domaine de $\mathbb{R}^2$
- ▷ Savoir dire si un domaine est ouvert
- ▷ Savoir définir la dérivée partielle comme la limite d'un taux d'accroissement
- ▷ Savoir calculer les dérivées partielles d'une composée par règle de la chaîne

❖ ❖ ❖