Contenu du cours

Chap. 11 - Variables aléatoires discrètes

- ▷ Définition d'une v.a. discrète (v.a.d.) ; événement $(X \in U)$, $(X = x)$ et pour une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$ (v.a.r.d), $(X \leqslant x)$; loi d'une v.a.d. : donnée de $X(\Omega)$ et de $\mathbf{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. Système complet d'événements associés à une v.a.d.
- ▷ Lois usuelles : loi uniforme $\mathscr{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$, loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ (schéma théorique, variable indicatrice d'un événement), loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ (schéma théorique), loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ (schéma théorique, caractérisation par l'absence de mémoire), loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.
- ▷ Espérance d'une v.a.r.d. X d'espérance finie (ie avec absolue convergence de la série associée) ; propriétés : $\mathbf{E}(aX+b)$, positivité. Variable centrée. Théorème du transfert à **une** variable ; formule de l'antirépartition pour une v.a.r.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Espérance pour les lois usuelles.
- ▷ Variance d'une v.a.r.d. X admettant des moments d'ordre 2 ; formule de König-Huygens. Variable réduite, variable centrée réduite associée à une v.a.r. Propriétés usuelles de la variance : $\mathbf{V}(aX + b)$, positivité ; écart-type. Variance pour les lois usuelles.
- ▷ Fonction génératrice de somme $G_X(t) = \mathbf{E}(t^X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)t^n$, pour une v.a.r.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Lien avec l'espérance et le moment d'ordre 2.

Mise en garde :

- ▷ la notion spécifique de couple de variables aléatoires n'est pas à ce programme de colles.
- ▷ A ce stade, il n'est donc **pas possible** de donner d'exercice utilisant la notion de variables indépendantes.
- ▷ de même, la linéarité de l'espérance n'a été vue que dans sa forme faible, pour $\mathbf{E}(aX + b)$ et non pour $\mathbf{E}(aX + bY)$.

Chap. 12 - Espaces préhilbertiens

- ▷ Produit scalaire : définition et exemples usuels (sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathscr{C}^0([a, b])$).
- ▷ Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité. Norme préhilbertienne associée à un produit scalaire; espace préhilbertien réel.
- ▷ Orthogonalité de deux vecteurs; théorème de Pythagore, version généralisée à n vecteurs. Famille orthogonale, orthonormale; toute famille orthogonale de vecteurs tous non nuls (resp. orthonormale) est libre. Dans un ev de dimension finie, il existe une base orthogonale (algorithme de Gram-Schmidt). Calculs en base orthonormale : expression matricielle du produit scalaire, coordonnées d'un vecteur en BON.
- ▷ Orthogonal d'un sev de dimension finie d'un ev préhilbertien réel ; caractérisation des éléments de $F^\perp$ lorsqu'on connaît une famille génératrice de F. Projection orthogonale sur un sev F de dimension finie dans un espace préhilbertien réel E; F et l'orthogonal de F sont supplémentaires dans E, cas d'un hyperplan. Théorème de la projection orthogonale : expression de la projection orthogonale dans une base orthonormale de F.
- ▷ Distance d'un vecteur à un sev ; lien avec la projection orthogonale.

Questions de cours

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.
On demandera à chaque étudiant un (ou deux) énoncés figurant au programme de colle (Chap. 11 ou 12) et le développement d'un exemple du cours parmi :

- ▷ Groupe A :
  - ▷ Ex 11.1 à 11.11.
  - ▷ Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (sans le cas d'égalité).
  - ▷ Ex 12.1 à 12.6
- ▷ Groupe B :
  - ▷ Ex 11.2, 11.3, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8.ii, 11.11
  - ▷ Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (sans le cas d'égalité).
  - ▷ Ex 12.1 à 12.6

Compétences de base

Concernant le chapitre 11 :

- ▷ Savoir déterminer la loi d'une v.a.r.d
- ▷ Savoir retrouver la loi à partir de la fonction de répartition
- ▷ Savoir reconnaître une loi binomiale (nombre de succès... avec hypothèses)
- ▷ Savoir reconnaître une loi géométrique (temps d'attente du premier succès... avec hypothèses)
- ▷ Savoir montrer qu'une v.a.r.d. est d'espérance finie
- ▷ Savoir calculer l'espérance d'une v.a.r.d. par la définition
- ▷ Savoir calculer l'espérance d'une v.a.r.d. par linéarité
- ▷ Savoir calculer une espérance par théorème du transfert, notamment pour les calculs de variance.
- ▷ Savoir former une fonction génératrice
- ▷ Savoir, à partir de la fonction génératrice, récupérer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(X^2)$.

Concernant le chapitre 12,

- ▷ Savoir démontrer qu'une application est un produit scalaire
- ▷ Savoir mettre en place une orthonormalisation de Gram-Schmidt
- ▷ Savoir traduire que $x \in F^{\perp}$ via une famille génératrice de F
- ▷ Savoir calculer $p_F(x)$ en BON (formule)
- ▷ Savoir appliquer la définition pour calculer $p_F(x)$
- ▷ Savoir reconnaître la distance d'un vecteur à un sev
- ▷ Savoir calculer la distance d'un vecteur à un sev

❖ ❖ ❖