Révisions

- Chap. 2 - Intégrales généralisées.

Remarque : chaque élève sera évalué sur cette partie, par un ou plusieurs énoncés à savoir citer et/ou par un exercice portant sur ces thématiques.
En revanche, on ne posera pas les exemples de cours des chapitres cités ci-dessus en tant que question de cours.

Contenu du cours

Chap. 13 - Fonctions de plusieurs variables - Partie I

On se limitera aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, les énoncés ont été donnés pour $\mathbb{R}^2$, mais restent au programme dans $\mathbb{R}^3$.

- Boules ouvertes ou fermées, parties ouvertes ; point intérieur, point adhérent (*les notions doivent être comprises, et les définitions correctement connues. On évitera cependant les exercices théoriques sur ces notions*).
- Définition d'une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $\mathscr{A}$ adhérent à D. Opérations sur les limites. Continuité, opérations sur les fonctions continues (*les problèmes de prolongement par continuité ne sont pas un objectif du programme*).
- Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) > 0$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Dérivées partielles premières d'une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ notées $\partial_i f$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, gradient de f en a, noté $\nabla f(a)$. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et opérations. Théorème admis : si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, f admet en tout point de U un développement limité d'ordre 1. Continuité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Composition des applications de classe $\mathscr{C}^1$ (règle de la chaîne) pour dériver $t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$.
- Dérivées partielles d'ordre 2, théorème de Schwarz.
- Fonctions de $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: fonctions coordonnées, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$, règle de la chaîne pour la dérivation de $(u, v) \mapsto f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$. Composition des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

Chap. 14 - Intégrales à paramètre

- **Théorème de continuité** : Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $A \times I$. On suppose que :
  - Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A.
  - Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur I.
  - Hypothèse de domination : il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ telle que :
  $$\forall (x, t) \in A \times I,\ |f(x, t)| \leqslant \varphi(t)$$
  avec φ indépendante de x et intégrable sur I.

  Alors la fonction g définie par $g(x) = \displaystyle\int_I f(x, t)\ \mathrm{d}t$ est continue sur A.
- **Théorème de dérivation** : Soit $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction définie sur $A \times I$. On suppose que :
  - Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.
  - Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I.
  - Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I.

- ▷ Hypothèse de domination : il existe une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}_+$ telle que :
$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$$
avec ψ indépendante de x et intégrable sur I.

alors la fonction g définie par $g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, et :
$$\forall x \in A,\ g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

▷ **Théorème d'intégration terme à terme** : soit $S : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On suppose que :

- ▷ S est continue sur I.
- ▷ Il existe des fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$ intégrables sur I telles que :$\forall t \in I,\ S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.
- ▷ La série $\sum \displaystyle\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Alors S est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Attention : en début de semaine, nous n'aurons pas encore fait d'exercices sur le théorème d'intégration terme à terme.

Questions de cours

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.
On demandera à chaque étudiant un (ou deux) énoncés figurant au programme de colle (Chap. 13 ou 14) et le développement d'un exemple du cours parmi :

- ▷ Groupe A :
  - ▷ Ex 13.1 à 13.12
  - ▷ Ex 14.1 à 14.4
- ▷ Groupe B :
  - ▷ Ex 13.3, 13.4, 13.5, 13.6, 13.9, 13.10, 13.12
  - ▷ Ex 14.1 à 14.4

Compétences de base

Concernant le chapitre 13,

- ▷ Savoir représenter un domaine de $\mathbb{R}^2$
- ▷ Savoir dire si un domaine est ouvert
- ▷ Savoir définir la dérivée partielle comme la limite d'un taux d'accroissement
- ▷ Savoir calculer les dérivées partielles d'une composée par règle de la chaîne

Concernant le chapitre 14 :

- ▷ Savoir reconnaître qu'une fonction définie par une intégrale est une intégrale à paramètre.
- ▷ Savoir quelle version appliquer (théorème ou corollaire) suivant que I est un segment ou non.
- ▷ Savoir appliquer le théorème de continuité.
- ▷ Savoir appliquer le théorème de dérivabilité.
- ▷ Savoir procéder à une extension de conclusion, en raisonnant au voisinage de chaque point.
- ▷ Savoir reconnaître une application du théorème d'intégration terme à terme.

❖ ❖ ❖