Révisions

- Chap. 2 - Intégrales généralisées.

Remarque : chaque élève sera évalué sur cette partie, par un ou plusieurs énoncés à savoir citer et/ou par un exercice portant sur ces thématiques.
En revanche, on ne posera pas les exemples de cours des chapitres cités ci-dessus en tant que question de cours.

Contenu du cours

Chap. 14 - Intégrales à paramètre

- **Théorème de continuité** : Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $A \times I$. On suppose que :
  - Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.
  - Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
  - Hypothèse de domination : il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ telle que :
  $$\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$
  avec φ indépendante de x et intégrable sur I.

  Alors la fonction g définie par $g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est continue sur A.
- **Théorème de dérivation** : Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $A \times I$. On suppose que :
  - Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.
  - Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.
  - Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I.
  - Hypothèse de domination : il existe une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}_+$ telle que :
  $$\forall (x,t) \in A \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$$
  avec ψ indépendante de x et intégrable sur I.

  alors la fonction g définie par $g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, et :
  $$\forall x \in A,\ g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$
- **Théorème d'intégration terme à terme** : soit $S : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On suppose que :
  - S est continue sur I.
  - Il existe des fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$ intégrables sur I telles que :$\forall t \in I,\ S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.
  - La série $\sum \displaystyle\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

  Alors S est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

Chap. 15 - Isométries vectorielles

- Définition et caractérisations des isométries vectorielles (ou automorphismes orthogonaux): conservation de la norme, ou conservation du produit scalaire, ou transformation d'une BON en BON; groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$ (la structure de groupe n'est plus au programme mais on vérifie les propriétés conférant à $\mathrm{O}(E)$ une telle structure). Si un sev est stable par une isométrie f alors son orthogonal est stable par f.
- Symétrie orthogonale, réflexion.

- ▷ Définition d'une matrice orthogonale ($A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^T \cdot A = I_n$); caractérisation à l'aide des BON, des isométries vectorielles. Une matrice A est orthogonale ssi ses colonnes (resp. lignes) forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Groupe $\mathrm{O}(n)$.
- ▷ Isométries directes ; notations $\mathrm{SO}(E)$, $\mathrm{SO}(n)$. Caractérisation des isométries directes par transformation des BOND.
- ▷ Classification des isométries vectorielles en dimension 2 et des isométries vectorielles directes en dimension 3 : suivant la dimension de l'espace des invariants.
- ▷ Détermination pratique d'une isométrie vectorielle directe en dimension 3.
- ▷ Rappel sur les matrices symétriques réelles : définition, dimension. Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux. Théorème spectral.

Attention : la notion d'endomorphisme symétrique est hors-programme, ainsi que celle de matrice symétrique (définie-)positive. Pas non plus de vocabulaire sur les formes quadratiques.

Questions de cours

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.
On demandera à chaque étudiant un (ou deux) énoncés figurant au programme de colle (Révisions, Chap. 14 ou 15) et le développement d'un exemple du cours parmi :

- ▷ Groupe A :
  - ▷ Ex 14.1 à 14.4
  - ▷ Ex 15.1 à 15.6
- ▷ Groupe B :
  - ▷ Ex 14.1 à 14.4
  - ▷ Ex 15.2, 15.3, 15.5, 15.6

Compétences de base

Concernant le chapitre 14 :

- ▷ Savoir reconnaître qu'une fonction définie par une intégrale est une intégrale à paramètre.
- ▷ Savoir quelle version appliquer (théorème ou corollaire) suivant que I est un segment ou non.
- ▷ Savoir appliquer le théorème de continuité.
- ▷ Savoir appliquer le théorème de dérivabilité.
- ▷ Savoir procéder à une extension de conclusion, en raisonnant au voisinage de chaque point.
- ▷ Savoir reconnaître une application du théorème d'intégration terme à terme.

Concernant le chapitre 15 :

- ▷ Savoir déterminer la matrice d'une réflexion
- ▷ Savoir montrer qu'une matrice est orthogonale
- ▷ Savoir montrer qu'un endomorphisme est une isométrie
- ▷ Connaître les hypothèses pour qu'une matrice de rotation de $\mathbb{R}^3$ soit sous forme réduite
- ▷ Savoir trouver la matrice d'une rotation de l'espace dans une base quelconque
- ▷ Savoir déterminer les caractéristiques géométriques d'une isométrie vectorielle directe en dimension 3 donnée par sa matrice
- ▷ Savoir réduire une matrice symétrique réelle d'ordre 2 ou 3 en BON

❖ ❖ ❖