Révisions

- ▷ Chap. 10 - Courbes paramétrées.
- ▷ Chap. 11 - Variables aléatoires discrètes.
- ▷ Chap. 12 - Espaces préhilbertiens.

Remarque : chaque élève sera évalué sur cette partie, par un premier exercice portant sur l'une de ces thématiques, dont la longueur permettra d'aborder un second exercice sur le programme ci-dessous.

Contenu du cours

Chap. 18 - Vecteurs aléatoires

- ▷ Couple de v.a.d. ; loi conjointe, lois conditionnelles, lois marginales. Indépendance de deux v.a.d. ; si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- ▷ Formule du transfert à deux variables, sous réserve d'absolue convergence de toutes les séries en jeu.
- ▷ Grandeurs probabilistes : espérance : linéarité, croissance, espérance d'un produit de deux v.a.r.d. indépendantes ; série génératrice de la somme de deux v.a.r. indépendantes.
- ▷ Théorème du transfert à 2 variables. Si X et Y ont des moments d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie (admis).Inégalité de Cauchy-Schwarz, expression de $\mathbf{E}(XY)$ comme somme double.
- ▷ Covariance de (X, Y), définie par $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\Big(\big(X - \mathbf{E}(X)\big)\big(Y - \mathbf{E}(Y)\big)\Big)$, expression équivalente $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$. Propriétés de la covariance : linéarité par rapport à chaque variable, symétrie, lien avec la variance. Variables décorrélées, lien avec l'indépendance.
- ▷ Vecteurs aléatoires ; indépendance d'un nombre fini de v.a.d. Lemme des coalitions. Somme de v.a.r.d. indépendantes suivant une même loi de Bernoulli, Variance d'une somme de v.a.r.d.
- ▷ Suite de v.a. indépendantes. Notion de variables i.i.d.
- ▷ Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- ▷ Loi faible des grands nombres.

Chap. 19 - Fonctions de plusieurs variables - Partie II

- ▷ Parties bornées, parties fermées ; si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) \geqslant 0$ (ou $f(x, y) = 0$) est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
- ▷ Extrema de fonctions de deux variables : définitions ; si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue sur D fermé borné non vide de $\mathbb{R}^2$, alors f est bornée sur D et atteint ses bornes; sur un ouvert, un extremum local d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est atteint nécessairement en un point critique. Matrice hessienne, théorème de Taylor-Young à l'ordre 2. Étude réciproque d'un point critique à l'aide du spectre de la matrice hessienne, utilisation de la trace et du déterminant de la matrice hessienne ; notion de point-col.
- ▷ Application de la règle de la chaîne à la recherche de solutions d'EDP (*la notion de difféomorphisme n'est cependant pas au programme, et l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas un attendu*).
- ▷ Application à l'étude des courbes du plan données par une équation cartésienne de la forme $f(x, y) = 0$, où f est de classe $\mathscr{C}^1$: définition d'un point régulier, tangente en un point régulier. Définition des lignes de niveau de f et lien avec le gradient.

Questions de cours

Les colleurs s'assureront en début de séance de la connaissance du cours.
On demandera à chaque étudiant un (ou deux) énoncés figurant au programme de colle (Chapitres 18 et 19) et le développement d'un exemple du cours parmi :

- ▷ Groupes A et B :
  - ▷ Tous les exemples du chapitre 18
  - ▷ Tous les exemples du chapitre 19

Compétences de base

Concernant le chapitre 18 :

- ▷ Savoir passer de la loi conjointe d'un couple de v.a.d. aux lois marginales
- ▷ Savoir passer des lois conditionnelles d'un couple de v.a.d. aux lois marginales
- ▷ Connaître la loi de la somme de va de loi de Bernoulli ou de Poisson
- ▷ Savoir montrer que deux v.a.r.d. ne sont pas indépendantes avec un contre-exemple
- ▷ Savoir appliquer la formule de transfert à 2 variables
- ▷ Connaître la formule sur $\mathbf{E}(XY)$ en cas d'indépendance
- ▷ Connaître la formule sommatoire sur $\mathbf{E}(XY)$
- ▷ Connaître la formule sur $\mathbf{G}_{X+Y}$ en cas d'indépendance
- ▷ Savoir calculer la covariance d'une v.a.r.d. dans les cas simples.
- ▷ Savoir interpréter une covariance non nulle (pas indépendance)
- ▷ Savoir calculer la variance d'une somme
- ▷ Savoir appliquer l'inégalité de Markov
- ▷ Savoir appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- ▷ Savoir retrouver la majoration de la loi faible des grands nombres

Concernant le chapitre 19 :

- ▷ Savoir dire si un domaine est fermé ou borné
- ▷ Savoir mener la recherche d'extrema locaux sur un ouvert
- ▷ Savoir utiliser un changement de variable donné pour résoudre une EDP
- ▷ Savoir définir la tangente à une courbe donnée par $f(x, y) = 0$.

❖ ❖ ❖